姓名________ 学号 ________ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学期末考试

《 积分变换 》试卷(A)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 8 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									
评卷人									

一. 填空题（本题 30 分，每题 3 分）

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)\sin(t+1)dt = 0$

2. $\mathscr{F}\left[H(t)\right] = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

3. $\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \dfrac{1}{2\pi}$

4. $\mathscr{F}[t\delta(t)] = 0$

5. 若$\mathscr{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega)$，则$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(u)du\right] = \dfrac{1}{j\omega}\hat{f}(\omega) + \pi\hat{f}(0)\delta(\omega)$

6. $\mathscr{F}\left[\cos(t-\pi)\right] = -\pi[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]$

7. $\mathscr{L}\left[\cos\left(t-\pi\right)\right] = -\dfrac{s}{s^2+1}$

8. $\mathscr{L}\left[e^{jt}H(t)\right] = \dfrac{1}{s-j}$

9. $\mathscr{L}\left[\delta(t-1)\right] = e^{-s}$

10. 若$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则$\mathscr{L}[f(2t)] = \dfrac{1}{2}F(\dfrac{s}{2})$

二. （本题 10 分）

设 $f(t)=\begin{cases}1 & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$，$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ 求：

（1）$\mathscr{F}[\hat{f}(t)]$；（2）$\mathscr{F}[\hat{f}(-2t)]$.

解：（1）$\mathscr{F}[\hat{f}(t)]=2\pi f(-\omega)=\begin{cases}2\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$ （5 分）

（2）$\mathscr{F}[\hat{f}(-2t)]=\dfrac{1}{2}\bullet 2\pi f(\dfrac{-\omega}{-2})=\pi f(\dfrac{\omega}{2})=\begin{cases}\pi & |\omega|<2\\ 0 & |\omega|>2\end{cases}$ （10 分）

三. （本题 10 分）

设 $f'(t)-f(t)+g(t)=0$，其中$g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$，$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$，求：

（1）$\mathscr{F}[f(t)]$；（2）$\mathscr{F}\left[f(t)*g(t)\right]$.

解：（1）在等式 $f'(t)-f(t)=-g(t)$ 两边取傅立叶变换得:

$$j\omega\hat{f}(\omega)-\hat{f}(\omega)=-\hat{g}(\omega)=-\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

则有：$\mathscr{F}[f(t)]=\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$ （5 分）

（2）根据卷积性质有:

$$\mathscr{F}[f(t)*g(t)]=\hat{f}(\omega)\bullet\hat{g}(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}\bullet\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}=\frac{1-j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$ （10 分）

四. （本题 10 分）求 $\mathscr{F}[e^{jt}e^{-|t|}]$，

（1）用位移性质；（2）用卷积定理。

解：首先有

$$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}[e^{-|t|}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{1-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$$ （4 分）

（1）利用位移性质：$\mathscr{F}[e^{jt}e^{-|t|}]=\hat{f}(\omega-1)=\dfrac{2}{1+(\omega-1)^2}$ （7 分）

（2）利用卷积定理：$\mathscr{F}[e^{jt}e^{-|t|}]=\dfrac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega-1)*\dfrac{2}{1+\omega^2}\right]=\dfrac{2}{1+(\omega-1)^2}$ （10 分）

五．（本题 10 分）求：

(1) $\mathscr{L}\left[e^t t\sin t\right]$ ； (2) $\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right]$

解：利用 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$ 有：

（1）

$$\mathscr{L}\left[t\sin t\right]=-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^t t\sin t\right]=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}=\frac{2(s-1)}{s^2-2s+2}$$ （5 分）

（2）

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

（10 分）

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right]=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-\arctan s)$$

六．（本题 10 分）解方程

$$\begin{cases} y'(t)+y(t)+\int_0^t e^{\tau}y(t-\tau)d\tau=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \quad (t>0)$$

解：令 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，则

$$\mathscr{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$ （2 分）

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{\tau}y(t-\tau)\,d\tau\right]=\mathscr{L}\left[e^t * y(t)\right]=\frac{1}{s-1}\bullet Y(s)$$ （4 分）

对方程两边作拉氏变换得：

$sY(s)-1+Y(s)+\frac{1}{s-1}\bullet Y(s)=0$，从而有：

$Y(s)=\frac{s-1}{s^2}$，于是： （6 分）

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=1-t \quad (t>0)$$ （10 分）

七. （本题 10 分）求 $\mathscr{L}[f(t)]$

（1） $f(t)=t$，$0\le t<1$，$f(t+1)=f(t)$

（2） $f(t)=(t-1)^3H(t-1)$

解：（1）$T=1$，根据周期函数的拉氏变换公式有：

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}\,dt=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s(1-e^s)}$$ （5 分）

（2）利用拉氏变换的延迟性质有：

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[(t-1)^3H(t-1)]$$

$$=e^{-s}\mathscr{L}[t^3]=e^{-s}\frac{3!}{s^4}=\frac{6e^{-s}}{s^4}$$ （10 分）

八. （本题 10 分）求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$：

（1） $F(s)=\dfrac{(s-1)^2}{s^2+1}$；（2） $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)^2}$

解：（1） $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-1)^2}{s^2+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}[1]-2\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\right]=\delta(t)-2\cos t$ （5 分）

（2） $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s+1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)^2}\right]=1-e^{-t}-te^{-t}$

从而 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\left[1-e^{-(t-1)}-(t-1)e^{-(t-1)}\right]H(t-1)$ （10 分）