练习 3.5　线性变换

一、填空题:

1. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是同阶方阵，如果________________________________，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似.

2. 已知 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，且 $|\mathbf{A}|=2$，则 $|\mathbf{B}^{-1}|=$______________.

3. 若 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则 $|\mathbf{A}|=$______________.

二、选择题：

1．下列所定义的变换，一定是线性变换的是　[　　]

(A) 在线性空间 V 中，$\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}(\neq\mathbf{0})\in V$ 是一个固定的向量；

(B) 在 R^3 中，$\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$；　(C) 在 R^3 中，$\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

(D) 在 $R[x]$ 中，$\mathbf{T}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in R$ 是一个固定的数.

2. 设 $\mathbf{T}$ 是 R^n 上的线性变换，下列命题中正确的是　[　　]

(A) $\mathbf{T}$ 在不同基下的矩阵不同；　(B) $\mathbf{T}$ 在不同基下的矩阵的秩不同；

(C) $\mathbf{T}$ 在任一基下的矩阵是可逆的；　(D) $\mathbf{T}$ 在任两个基下的矩阵秩相同.

3. 设 R^n 上的线性变换 $\mathbf{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵是 [　　]

(A) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

4. 设 $\mathbf{T}$ 为线性空间 V 中的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，则必有　[　　]

(A) $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；　(B) $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{T}(V)$ 的一组基；

(C) $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；　(D) 以上结论都不对.

二、设 $\mathbf{T}$ 为线性空间 V 上的线性变换, 如果 $\mathbf{T}^k(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathbf{0}$, 且 $\mathbf{T}^n(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},(n>k)$，证明：$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha},\cdots\mathbf{T}^k\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

三、在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,0)^T$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基， 并且 $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_1=(-5,0,3)^T$, $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,6)^T,\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_3=(-5,-1,9)^T$，求线性变换 $\mathbf{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵以及 $\mathbf{T}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

四、设 $\mathbf{T}$ 为三维线性空间 V 上的线性变换, $\mathbf{T}$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. (1) 求 $\mathbf{T}$ 对于基 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1$ 矩阵；(2) 求 $\mathbf{T}$ 对于基的 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 矩阵, 其中 $k\neq 0$；(3) 求 $\mathbf{T}$ 对于基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 矩阵.