练习 3.4　欧氏空间

一、求一个向量β，使β与$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T,\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$构成$R^4$的一组基，并将这组基化成标准正交基.

二、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$是欧氏空间$V$的一个基，证明：(1) 若$\beta\in V$，使$[\beta,\alpha_i]=0, i=1,2,\cdots,n,$ 则$\beta=0$.

(2) 若$\beta_1,\beta_2\in V$, 使对任一$\alpha\in V$，有$[\beta_1,\alpha]=[\beta_2,\alpha]$，则$\beta_1=\beta_2$.

三、试用柯西—许瓦尔兹不等式证明：对于任意实数$a_1,a_2,...,a_n$，成立$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\le\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$.

四、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$是欧氏空间$V$的$n$个向量. 试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关的充分必要条件是行列式

$$D(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}=0.$$

五*、在线性空间$R[x]_3$中，(1) 求由基$(I):1,x,x^2,x^3$到基$(II):1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$的过渡矩阵；(2) 已知$f(x)$在$(I)$下的坐标为$(1,0,-2,5)^T$，$g(x)$在$(II)$下的坐标为$(7,0,8,-2)^T$. 求$f(x)+g(x)$分别在$(I)$和$(II)$下的坐标.