班级________________姓名________________学号__________________________

## 练习 3.3　向量空间的基以及向量的坐标

**一、选择题：**

1．下列集合构成的向量空间中，维数是$[\frac{n+1}{2}]$的是　　　　[　　]

（A）偶数号码的坐标相等的所有$n$维向量；（B）偶数号码和奇数号码的坐标分别相等的所有$n$维向量；

（C）偶数号码的坐标等于零的所有$n$维向量；（D）形如$(a,-a,a,-a,...)$的所有$n$维向量.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1)^T$，则$\boldsymbol{\alpha}_3=$[　　]时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为$R^3$的基

（A）$(0,0,1)^T$；　（B）$(0,1,0)^T$；　（C）$(1,0,1)^T$；　（D）$(2,1,2)^T$.

3. 已知$R^3$中的向量$\boldsymbol{\beta}=(7,3,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^T$，则 $\boldsymbol{\beta}$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为　　　　[　　]

（A）$(-2,1,6)^T$；　（B）$(1,-2,6)^T$；　（C）$(6,1,-2)^T$；　（D）$(1,2,6)^T$.

4. 全体二阶实矩阵对于矩阵的加法和数乘构成的线性空间$R^{2\times2}$的一组基底为　　　　[　　]

(A)$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

**二、验证$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^T$为$R^3$的一个基，并把$\boldsymbol{\beta}_1=(5,0,7)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(-9,-8,-13)^T$用这个基线性表示.**

三、已知 $R^3$ 中的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,1)^T$.

**(1)** 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵； **(2)** 求 $\boldsymbol{\gamma}=(9,6,5)^T$ 在这两组基下的坐标；

**(3)** 求向量 $\delta$，使它在这两组基下有相同的坐标.

四、若 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是线性空间 $\mathbf{V_3}$ 的一个基， 并且有 $\boldsymbol{\alpha}_1=\xi_1+\xi_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\xi_2,\boldsymbol{\alpha}_3=\xi_1+2\xi_2+2\xi_3$； $\boldsymbol{\beta}_1=\xi_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\xi_1+\xi_2,\boldsymbol{\beta}_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3$. **(1)** 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{V_3}$ 的基； **(2)**求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵； **(3)** 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标变换公式.