班级_____姓名_____学号_____

练习 3.2　向量组的线性相关性(2)

一、选择题：

1. 设矩阵 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s]$，$\mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均是 n 维列向量，且 $s<n$. 向量组 $(A)\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则向量组 $(B)\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充要条件是　　[　　]

(A) (A) 可由 (B) 线性表示；　(B) (B) 可由 (A) 线性表示；　(C) $(A)\cong(B)$；　(D) $\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+a\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，则条件(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；(3) $a=3$；(4) $a=-1$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关的充分条件的是[　　]

(A) (1)；　(B) $(2),(3)$；　(C) $(1),(3),(4)$；　(D) $(1),(4)$.

3. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\mathbf{C}$ 是 $m\times m$ 可逆矩阵，满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$. 则　　[　　]

(A) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关，$\mathbf{B}$ 的行向量组线性无关；

(B) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关，$\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关；

(C) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关，$\mathbf{B}$ 的行向量组线性无关；

(D) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关，$\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)^T$，则下列向量组中不是该向量组的最大无关组的是　　[　　]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$；　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$.

5. 已知四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=$　　[　　]

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

6. 设向量组 (A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则与向量组 (A) 等价的向量组是　　[　　]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 1；　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$；　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$，则下列结论错误的是　　[　　]

(A) $\boldsymbol{\beta}_1\neq\mathbf{0}$；　(B) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不成比例；　(C) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关；　(D) $\boldsymbol{\beta}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

班级_____姓名_____学号_____

二、问向量$\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 2\quad 1\quad 1)$能否由$\boldsymbol{\beta}_1=(1\quad 1\quad 1\quad 1),\boldsymbol{\beta}_2=(1\quad 1\quad -1\quad -1),\boldsymbol{\beta}_3=(1\quad -1\quad 1\quad -1),\boldsymbol{\beta}_4=(1\quad -1\quad -1\quad 1)$线性表示？ 若能表示，则求出表示式.

三、求向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(2\quad 3\quad 1\quad -2)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1\quad -1\quad 4\quad 0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3\quad -3\quad 12\quad 0)^T,\boldsymbol{\beta}_4=(5\quad 10\quad -1\quad -6)^T$的秩及它的一个最大无关组.

四、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关，且$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$都不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$等价.