

合工大（共创）考研辅导中心

2009 概率论与数理统计冲刺班讲义

概率论与统计的考试重点与典型例题分析

(一) 事件及其概率

考试重点提示

① 概率基本公式的应用

如： $0 \leq P(A) \leq 1$ 、且 $P(\emptyset) = 0$ 但若 $P(A) = 0$ 则不一定有 $A = \emptyset$ ；及加法、求余公式、减法公式、乘法公式及条件概率公式的应用

② 古典概型与几何概型的计算

特别是：取球问题的计算

③ 全概率公式及 Bayes 公式的应用

关键是有一组完备事件组： A_1, A_2, \dots, A_n 先发生，在之后事件 B 发生，一定是全概率公式的应用

④ 事件的独立与 Bernulli 概型的应用

考试注意：古典概型的取球问题、全概率公式的应用、Bernulli 概型与二项概率公式。

典型例题分析

例 1 设 A, B 为随机事件，且 $P(A) > 0, P(B|A) = 1$ ，则必有（ ）

- (A) $A = \Omega$ (B) $A \supset B$ (C) $A \subset B$ (D) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$.

解： $P(B|A) = 1 \Leftrightarrow P(BA) = P(A) \Leftrightarrow P(A - B) = 0$ ，则 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$. ■

例 2 设 A, B 是二事件，当 $0 < P(A) < 1$ ， $P(A/B) = P(A/\bar{B})$ 、 $P(A/B) = 1/3$ 、 $P(\bar{A} \cup B) = 3/4$ ，则 $P(B - A) =$ _____

解： $P(A/B) = P(A/\bar{B}) \Leftrightarrow A$ 与 B 独立，所以 $P(A/B) = P(A) = 1/3$ ， $3/4 = P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

$$= 1 - P(A)P(\bar{B}) = 1 - P(A)(1 - P(B)) = 1 - \frac{1}{3}(1 - P(B)), \therefore P(B) = \frac{1}{4},$$

$$\text{则 } P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B)(1 - P(A)) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

例 3 设 10 件产品中有 3 件次品，因需要已经使用了 2 件，现对剩下的 8 件任取二件，试求：1) 这二件恰有一件次品的概率；2) 这二件有一件次品的条件下，使用过的 2 件均是正品的概率。（注意到：一次取 n 件与每次取一件不返回的取 n 次，概率是相同的）

解：考察古典概型与全概率公式的应用

设 $A_i = \{\text{用过的两件有 } i \text{ 件次品}\} (i=0, 1, 2)$ ， $B = \{\text{这两件恰有一件次品}\}$ ，注意到

A_0, A_1, A_2 是完备事件组， B 发生在后，典型的全概率公式问题

$$1) \alpha = P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B/A_i) = \frac{C_3^0 C_7^2}{C_{10}^2} \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} + \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} + \frac{C_3^2 C_7^0}{C_{10}^2} \frac{C_1^1 C_7^1}{C_8^2} = \frac{7}{15};$$

$$\text{由 Bayes 公式可得: II) } \beta = \frac{P(A_0)P(B/A_0)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{15} \frac{15}{28}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{28} \quad \blacksquare$$

(二) 一维随机变量及其分布

考试重点提示

① 随机变量及其分布 (分布函数、分布律及分布密度函数)

定义、基本性质、函数间的关系及相应的概率计算公式的应用, 如

$$F(x) = P(X \leq x), \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{a < x_i \leq b} p_i$$

② 常见八个常用分布, 特别其中五个重要分布 (分布律、密度函数及其分布函数等)

③ 求随机变量的函数分布的方法

已知 $X \sim f_X(x)$ 求 $Y = g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$

二种方法: 1) 公式法

★2) 分布函数法: (三步法) I) 确定 y 的取值范围; II) 由分布函数定义

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$ 分段讨论; III) 求 $f_Y(y) = F'_Y(y)$

④ 均值 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 的定义计算公式及其性质的应用

考试注意: 熟悉分布函数的定义、特别熟悉常用随机变量的分布、掌握公式与性质求均值、方差、**熟练掌握**求随机变量的函数的分布的方法、

典型例题分析

例 4 设 X 与 Y 相互独立, $X \sim f(x)$ 且 $f(-x) = f(x)$ 、 $Y \sim B(3, 1/3)$, 则行列式

$$\begin{vmatrix} X & X & 0 \\ 0 & Y-2 & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \text{ 的概率: } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解: } \because \begin{vmatrix} X & X & 0 \\ 0 & Y-2 & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & X \\ 2 & Y \end{vmatrix} = X(Y-2), \text{ 由独立性与 } f(-x) = f(x) \text{ 可知}$$

$$\therefore \alpha = P(X(Y-2) > 0) = P(X > 0)P(Y > 2) + P(X < 0)P(Y < 2)$$

$$= \frac{1}{2}[P(Y > 2) + P(Y < 2)] = \frac{1}{2}[1 - P(Y = 2)] = \frac{1}{2}[1 - 3(\frac{1}{3})^2 \frac{2}{3}] \quad \blacksquare$$

例 5 设 $X \sim e(\lambda)$, 对 X 作三次独立观测, 已知最多有二次观测值大于 3 的概率为 $1 - e^{-9}$

I) 参数 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$; II) 方差 $D(X + e^{-2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$

解 I) 设 Y 是三次独立观测中观测值大于 3 的次数, 则 $Y \sim B(3, p_0)$, 而

$$p_0 = P(X > 3) = 1 - F(3) = e^{-3\lambda}, \text{ 由于 } P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 3) = 1 - (e^{-3\lambda})^3 = 1 - e^{-9\lambda},$$

$$\therefore P(Y \leq 2) = 1 - e^{-9}, \therefore \lambda = 1$$

$$\text{II) } D(X + e^{-2X}) = E(X + e^{-2X})^2 - (E(X + e^{-2X}))^2$$

$$\text{其中: } E(X + e^{-2X}) = E(X) + E(e^{-2X}) = \frac{1}{\lambda} + \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$E(X + e^{-2X})^2 = E(X^2) + 2E(Xe^{-2X}) + E(e^{-4X})$$

$$= (D(X) + (E(X))^2) + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = 2 + \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{109}{45}$$

$$\text{所以有 } D(X + e^{-2X}) = \frac{109}{45} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{29}{45} \quad \blacksquare$$

例 6 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} A(1+x), & -1 \leq x < 0 \\ B(2-x), & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且 $E(X) = 1/6$, 试求:

I) 常数 A 与 B ; II) 在 $Y = X^2 - 1$ 时, 密度函数 $f_Y(y)$; III) 均值 $E(X^2 + 2Y)$.

解 I) 由于 $1 = A \int_{-1}^0 (1+x) dx + B \int_0^2 (2-x) dx = \frac{A}{2} + 2B$,

$$\frac{1}{6} = A \int_{-1}^0 x(1+x) dx + B \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{1}{6}(-A + 8B)$$

$$\text{解得: } A=1, B=1/4 \quad f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4}(2-x), & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

II) 求 $Y = X^2 - 1$ 时, 密度函数 $f_Y(y)$

① $-1 < x < 2$, 与 $y = x^2 - 1$, 可得 $-1 < y < 3$, $y_0 = 0$ (分界点)

② 分段讨论: $F(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 - 1 \leq y)$

$$y < -1, F_Y(y) = 0; \quad y \geq 3, F_Y(y) = 1$$

$$-1 \leq y < 0, F(y) = P(X^2 - 1 \leq y) = P(-\sqrt{y+1} \leq X \leq \sqrt{y+1})$$

$$= \int_{-\sqrt{y+1}}^0 (1+x) dx + \int_0^{\sqrt{y+1}} \frac{1}{4}(2-x) dx$$

$$0 \leq y < 3, F(y) = P(-\sqrt{y+1} \leq X \leq \sqrt{y+1})$$

$$= \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^{\sqrt{y+1}} \frac{1}{4}(2-x) dx$$

$$\text{③ } f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{6}{\sqrt{y+1}} - 5 \right), & -1 < y < 0 \\ \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\sqrt{y+1}} - 1 \right), & 0 \leq y < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

III) $E(X^2 + 2Y) = E(X^2 + 2(X^2 - 1)) = 3E(X^2) - 2$

$$= 3 \left(\int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^2 x^2(2-x) dx \right) - 2 = 1/4 \quad \blacksquare$$

(三) 多维随机变量及其分布

考试重点提示

- ① 二维随机变量及其联合分布律、联合密度函数及其性质及相应的概率计算

$$\text{如 } P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$$

- ② 边缘分布、独立性及相关性的判别及条件分布与条件概率的计算

$$\text{如 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) & \forall x, y \\ p_{ij} = p_{i.}p_{.j} & \forall i, j \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立 \Rightarrow 不相关 (仅 (X, Y) 服从二维正态分布除外, 是充要条件)

$$\text{条件密度函数 } f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0$$

- ③ $COV(X, Y)$ 与 ρ_{XY} 的定义及计算公式、常用性质

$$\text{如 } COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

$$COV(aX, bY + cZ) = abCOV(X, Y) + acCOV(X, Z)$$

$$\begin{matrix} X & & & Y & & & \text{不} & & \text{相} & & \text{关} \\ & & \text{与} & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow COV(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

- ④ 多维随机变量函数的分布

$$\text{简单的函数: } Z = X \pm Y, Z = XY, Z = X/Y, Z = \sqrt{X^2 + Y^2}, U = \max\{X, Y\}$$

$$V = \min\{X, Y\} \text{ 的分布}$$

重点: 1) 分布函数法: 三个步骤

$$2) \quad Z = X + Y \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx, \quad Z = X - Y,$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dx$$

----- 卷积公式:

$$2) \quad X, Y \text{ 独立时 } U = \max\{X, Y\} \text{ 分布函数 } F_U(z) = F_X(x)F_Y(y);$$

$$V = \min\{X, Y\} \text{ 分布函数: } F_V(z) = 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))$$

考试注意: 这是个概率的必考内容, 关注: 熟练掌握多元分布函数、边缘分布和条件分布的计算, 掌握判断独立性的方法并进行有关的计算, 会求两个随机变量函数的分布。

典型例题分析

例 7 设系统是由两个独立工作的部件构成, 每个部件的工作寿命服从参数为 λ 的指数分布, 且平均工作寿命为 4 个单位, 试求在以下两种情况下, 系统的工作寿命 T 的分布

I) 两个部件正常时, 系统才能正常工作; II) 先启动一个部件, 故障时另一个自动启动工作。

解 设两部件的工作寿命分别是 X_1, X_2 , 且对应的密度与分布函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{且 } E(X) = 2, \text{ 所以 } \lambda = 1/4$$

I) 由题意知: $T = \min\{X_1, X_2\}$, 及独立性可得, T 的分布函数是

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{\min\{X_1, X_2\} \leq z\} = 1 - (1 - F(z))^2 \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda = 1/4) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

II) 由题意知: $T = X_1 + X_2$, 根据卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} f_{X_2}(z-x) dx$$

区域 $D_{xy}: x > 0, y > 0; \Rightarrow D_{xz}: x > 0, z > x;$

$$z < 0, f_Z(z) = 0; \quad z \geq 0, f_T(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$$\text{所以 } f_T(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda = 1/4)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{16} z e^{-\frac{z}{4}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

例 8 设口袋中有 2 个白球 3 个黑球, 连续不放回的任取 3 个, X 表示抽到白球的总数,

$Y = \begin{cases} 1, & \text{第三次取得白球} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 试求:

I) (X, Y) 的分布律; II) X 与 Y 的独立性; III) $COV(X, 2X + Y)$

解 I) 求 (X, Y) 的联合分布律, X 与 Y 的可能取值为 0, 1, 2; 0, 1
根据题意可得:

$$P(X=0, Y=0) = \frac{3}{5} \frac{2}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \quad \text{分布律为}$$

$$P(X=0, Y=1) = 0,$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{2}{5} \frac{3}{4} \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \frac{2}{4} \frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{3}{5} \frac{2}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{5},$$

同理可知

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{10}, \quad P(X=2, Y=1) = \frac{1}{5}.$$

II) 由于 $p_{11} = \frac{1}{10}$, $p_{1.} p_{.1} = \frac{1}{10} \frac{3}{5}$ 所以不能独立。

III) $COV(X, 2X + Y) = 2D(X) + COV(X, Y)$

$$\text{其中: } E(X) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}, \quad E(X^2) = \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5},$$

$$D(X) = \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{25},$$

$$COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = (1 \times 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times 1 \times \frac{1}{5}) - \frac{6}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25}$$

$$\text{所以知, } COV(X, 2X + Y) = 2 \times \frac{9}{25} + \frac{3}{25} = \frac{21}{25}$$

X \ Y	0	1	p_i
0	1/10	0	1/10
1	2/5	1/5	3/5
2	1/10	1/5	3/10
p_j	3/5	2/5	1

例9 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ay, & x^2 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \text{试求:}$$

I) 常数A; II) 边缘密度 $f_X(x)$; III) $P(Y < \frac{3}{8} / X = \frac{1}{2})$ 。

解 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 所以 $1 = A \int_0^1 dx \int_{x^2}^x y dy = \frac{A}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{A}{15}$, 即 $A=15$

$$\text{II)} \quad f_X(x) = 15 \int_{x^2}^x y dy = \frac{15}{2} x^2 (1 - x^2) \quad 0 < x < 1$$

$$\text{所以有} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{2} x^2 (1 - x^2) & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

III) 先求条件密度

$$0 < x < 1 \text{ 时, 有 } f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{x^2(1-x^2)}, & x^2 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{在 } x=1/2 \text{ 时, } f_{Y/X}(y/x)|_{x=1/2} = \begin{cases} \frac{32y}{3}, & \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{所以, } P(Y < \frac{3}{8} / X = \frac{1}{2}) = \frac{32}{3} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} y dy = \frac{5}{12} \quad \blacksquare$$

例10 设 (X, Y) 在 $G = \{(x, y) / 0 < x < 1, 1-x < y < 1\}$ 上服从均匀分布, 试求:

I) 函数 $Z = X - Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$; II) $E(|X - Y|)$; III) $D(|X - Y|)$

解 I) 求 $Z = X - Y$ 的 $f_Z(z)$

方法一 分布函数法:

① $0 < x < 1, 1-x < y < 1$, $z = x - y$ 对应 z 的取值 $-1 < z < 1$, $z = 0$ (分界点)

② 由分布函数 $F(z) = P\{X - Y \leq z\}$ 分段讨论

1) $z < -1, F_Z(z) = P\{X - Y \leq z\} = 0; \quad z \geq 1, F_Z(z) = 1$

$$2) \quad -1 \leq z < 0, \quad F_Z(z) = \iint_{x-y \leq z} 2 dx dy = 2 \int_{\frac{1-z}{2}}^1 dy \int_{1-y}^{y+z} dx = 2 \{1 - \frac{(1-z)^2}{4} + \frac{1}{2}(z^2 - 1)\},$$

3

$$0 \leq z < 1, \quad F_Z(z) = \iint_{x-y \leq z} 2 dx dy = 1 - 2 \int_{\frac{1+z}{2}}^1 dx \int_{1-x}^{x-z} dy = 1 - 2 \{1 - \frac{(1+z)^2}{4} + \frac{1}{2}(z^2 - 1)\},$$

$$\text{③} \quad f(z) = F'(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leq z < 0 \\ 1-z, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

方法二 利用卷积公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dx$

$D_{xy} : 0 < x < 1, 1-x < y < 1$, 转换 $D_{xz} : 0 < x < 1, x-1 < z < 2x-1$

由图分段讨论

$$\textcircled{1} \quad -1 < z < 0, \quad f_Z(z) = \int_{\frac{1+z}{2}}^{z+1} 2dx = 1+z; \quad \textcircled{2} \quad 0 < z < 1, \quad f_Z(z) = \int_{\frac{1+z}{2}}^1 2dx = 1-z$$

所以有

$$f(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leq z < 0 \\ 1-z, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad E(|X-Y|) &= 2 \iint_G |x-y| dx dy = 2 \iint_{D_1} (x-y) dx dy + 2 \iint_{D_2} (y-x) dx dy \\ &= 4 \iint_{D_1} (x-y) dx dy = 4 \int_{1/2}^1 dx \int_x^{1-x} (x-y) dy \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

$$\text{III)} \quad D(|X-Y|) = E(|X-Y|^2) - [E(|X-Y|)]^2$$

其中

$$\begin{aligned} E(|X-Y|^2) &= E((X-Y)^2) = 2 \iint_G (x-y)^2 dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x-y)^2 dy = -\frac{2}{3} \int_0^1 [(x-1)^3 - (2x-1)^3] dx \\ &= 1/6 \end{aligned}$$

由此

$$D(|X-Y|) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1/18 \quad \blacksquare$$

练习 1 设 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim U(0,1), Y \sim E(\lambda)$, 试求: I) $Z = X+Y$ 的 $f_Z(z)$;

II) 在 $E(Z) = 3/2$ 时, 概率 $P(Z \leq 2)$ III) $COV(Z, 2X)$

练习 2 (X, Y) 服从 $G = \{(x, y) / |x-y| \leq 1, |x+y| \leq 1\}$ 上的均匀分布,

$$\text{令 } U = \begin{cases} 1, & X+Y \geq 0 \\ 0, & X+Y < 0 \end{cases}, \quad V = \begin{cases} 1, & Y \geq 0 \\ 0, & Y < 0 \end{cases}$$

试求: I) 边缘密度函数 $f_X(x)$ $f_Y(y)$; II) X 与 Y 的独立性; III) (U, V) 的联合分布律;

IV) 在 $V=1$ 时 U 的条件分布律;

四) 数理统计

考试重点提示

① 几个常用统计量及其结论

1) X 为总体, X_1, \dots, X_n 为样本, 且 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$, 则 $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \sigma^2/n$

$$E(S^2) = \sigma^2, E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

2) X 为正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, \bar{X} 与 S^2 相互独立

② 三个常用分布及其性质

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) \quad T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n) \quad F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m, n) \quad \text{注意对应的条件}$$

③ 二个点估计的方法

1) 矩估计法

2) 极大似然估计方法: i) 定义法 ii) 极值法 (三步法)

④ 估计量的三个评价标准

最重要的是无偏性 $E_\theta(\hat{\theta}) = \theta$, 有效性、相合性

⑤ 区间估计与假设检验

考试注意: 求统计量的数字特征及统计量的分布, 最大似然估计与矩估计、估计量的评价(关键还是: 无偏估计)、区间估计与单正态总体的假设检验统计(检验统计量)

典型例题

例 11 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, \dots, X_n 与 X_{n+1} 是样本, 且 X_1, \dots, X_n 的样本均值与样本方

差分别是 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 试求

$$(I) Y_1 = C \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{S} \sim \text{_____}, \quad (II) Y_2 = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2 \text{ 是否为 } \mu^2 \text{ 的无偏估计}$$

解 I) 由于 $\bar{X} - X_{n+1} \sim N(0, \frac{n+1}{n} \sigma^2)$, $\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n} \sigma^2}} \sim N(0, 1)$;

又有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 而 \bar{X} 与 S^2 相互独立及 t 分布的定义知:

$$\frac{\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n} \sigma^2}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} \sim t(n-1), \text{ 由此 } Y_1 = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{S} \sim t(n-1);$$

II

$$E(Y_2) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(S^2) = [D(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2] - \frac{1}{n} E(S^2) = [\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2] - \frac{1}{n} \sigma^2 = \mu^2$$

即 Y_2 是 μ^2 的无偏估计

■

例 12 设 X_1, \dots, X_5 是总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$, 试求

I) $Y = \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 + (X_4 - X_5)^2$ 时, $E(Y)$ 、 $D(Y)$; II) 考察 $Z = \frac{X_4 - X_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2}}$ 的

分布;

III) $\frac{1}{Z^2}$ 服从的分布。

解 I) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(2)$, $E\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2\right] = 2$;

又 $X_4 - X_5 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $\frac{(X_4 - X_5)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$; $E\left[\frac{(X_4 - X_5)^2}{2\sigma^2}\right] = 1$

所以 $E\left[\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2\right] = 2\sigma^2$, $E[(X_4 - X_5)^2] = 2\sigma^2$, 则有

$$E(Y) = 2\sigma^2 + 2\sigma^2 = 4\sigma^2$$

由于 $D\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2\right] = 2 \times 2 = 4$ 及 $D\left[\frac{(X_4 - X_5)^2}{2\sigma^2}\right] = 2 \times 1 = 2$, 则

$$D(Y) = D\left[\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2\right] + D[(X_4 - X_5)^2] = 4\sigma^4 + 8\sigma^4 = 12\sigma^4$$

II) 由于 $\frac{X_4 - X_5}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(2)$,

由样本的独立性及 t 分布定义知, $\frac{\frac{X_4 - X_5}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 / 2}} \sim t(2)$, 即

$$Z = \frac{X_4 - X_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(2)$$

III) 由于 $Z^2 = \left(\frac{X_4 - X_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2}}\right)^2 = \frac{\left[\frac{X_4 - X_5}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 / 2} \sim F(1, 2)$

所以由 f 分布的定义知有 $\frac{1}{Z^2} \sim F(2, 1)$ ■

例 13 设总体 $X \sim U(a, b)$ (均匀分布) X_1, \dots, X_n 是 X 的样本, 试求: I) 参数 a 与 b 的矩估计; II) 参数 a 与 b 的极大似然估计; III) 对 b 的极大似然估计 \hat{b}_L 求密度函数。

例 14 设总体 X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

X_1, \dots, X_n 是 X 的样本, 则 (I) 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$; (II) 求 $Y = \ln X$ 的分布; (III) 对参数 $\beta = P\{Y \leq \frac{3}{2}\theta\}$ 的极大似然估计。

解 I) 似然函数

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi x_i}} e^{-\frac{(\ln x_i - \theta)^2}{2}} = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta)^2} \quad (x_i > 0) \quad \frac{d \ln L}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \ln x_i - n\theta = 0$$

$$\therefore \hat{\theta}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

(II) 求 $Y = \ln X$ 的分布密度,

由于 $x > 0$, 对 $y = \ln x, z \in (-\infty, +\infty)$, 分段讨论:

$$y < 0, \quad F_Y(y) = P(\ln X \leq y) = 0$$

$$y \geq 0, \quad F_Y(y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_{-\infty}^{e^y} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2}} dx$$

$$f(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \theta)^2}{2}}, \quad \therefore Y \sim N(\theta, 1);$$

$$\text{III) } \beta = P\{Y \leq \frac{3}{2}\theta\} = P\{Y - \theta \leq \frac{\theta}{2}\} = \Phi\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

所以参数 β 的最大似然估计是 $\hat{\beta} = \Phi\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \ln x_i\right)$. ■

例 15 设测定某种溶液的水分 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 做了 10 次测定, 计算得样本均值 $\bar{x} = 0.468(\%)$, 样本标准差 $s = 0.04(\%)$, 对 $\alpha = 0.05$ 时, 试求:

I) μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间; II) 能否可以确定该溶液的水份含量明显低于 0.5.

练习 3 (06-1、3) 设 $X \sim f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, X_1, \dots, X_n 是 X 的样本, 其中有

N 个小于 1, 试求: θ 的极大似然估计

练习 4 $X \sim f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, X_1, \dots, X_n 是 X 的样本, 试求:

(I) θ 的矩估计 $\hat{\theta}$; (II) $\hat{\theta}$ 关于 θ 的无偏性; (III) $D(\hat{\theta})$ 考察 $\hat{\theta}$ 的相合性